Exame final nacional de Matemática A (2016, Época especial)

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O declive da reta AB é dado por:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Como retas paralelas têm o mesmo declive, de entre as opções apresentadas a única reta paralela à reta AB é a que tem declive $\frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

2. Organizando todos os resultados possíveis para os dois números possíveis de observar, recorrendo a uma tabela, temos:

Dado cúbico / **Dado tetraédrico**	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6

Assim, podemos verificar que existem $4 \times 6 = 24$ alternativas para os lançamentos das duas pessoas, dos quais apenas 9 tem pelo menos uma face 4, pelo que recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de, pelo menos, uma pessoa registar o número 4:

$$p = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

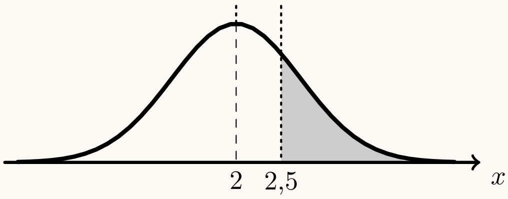
Resposta: **Opção A**

3. Atendendo a que a variável aleatória X segue uma distribuição normal, com $\mu = 2$ e $\sigma = 0{,}5$, temos que:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1{,}5 < X < 2{,}5) \approx 0{,}6827$

- $P(X > \mu + \sigma) = P(X > 2{,}5) =$

$$= \frac{1 - P(1{,}5 < X < 2{,}5)}{2} \approx \frac{1 - 0{,}6827}{2} \approx 0{,}16$$



Resposta: **Opção D**

4. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$a = b^3 \Leftrightarrow \log_b a = 3$$

Pelas propriedades operatórias dos logaritmos, vem que:

$$\log_a b + \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}$$

Resposta: **Opção C**

5. Pela definição de função composta temos que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0$$

Como, pela observação do gráfico, podemos verificar que:

$$f(-1) = 0 \wedge f(1) = 0$$

Desta forma, vem que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x = e$$

Resposta: **Opção D**

6. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $x=-1$, pelo que:

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(-1)=k+2$
- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4}=\dfrac{\operatorname{sen}(3(-1)+3)}{4(-1)+4}=\dfrac{\operatorname{sen}(0)}{0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=x+1$, se $x\to -1$, então $y\to 0$, e $3y\to 0$)

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\operatorname{sen}\big(3(x+1)\big)}{4(x+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y)}{4y}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{4}\times\frac{\operatorname{sen}(3y)}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{3}{4}\times\frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{3}{4}\times\underbrace{\lim_{3y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$$

Como a função é contínua em $x=-1$, podemos determinar o valor de k:

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)\ \Leftrightarrow\ k+2=\frac{3}{4}\ \Leftrightarrow\ k=\frac{3}{4}-2\ \Leftrightarrow\ k=\frac{3}{4}-\frac{8}{4}\ \Leftrightarrow\ k=-\frac{5}{4}$$

Resposta: **Opção B**

7. Analisando cada um dos números complexos das hipóteses apresentadas, podemos verificar que:

- $3+4i$ não pertence à região definida pela condição porque

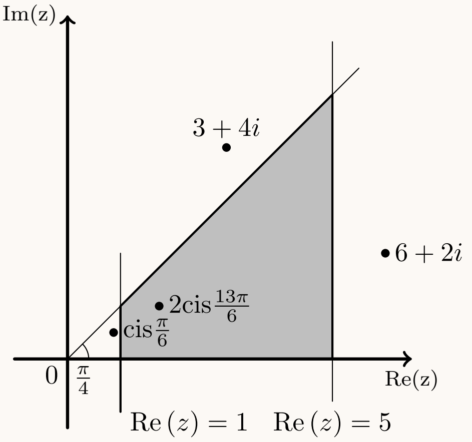
$$\arg(3+4i)>\frac{\pi}{4}$$

- $6+2i$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\operatorname{Re}(6+2i)>5$$

- Como $\operatorname{Re}\left(\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$ não pertence à região definida pela condição porque

$$\operatorname{Re}\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)<1$$



Assim, podemos concluir que o número complexo $2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}$, pertence à região definida pela condição, porque:

- $\operatorname{Re}\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)=2\cos\dfrac{13\pi}{6}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$, logo $1<\operatorname{Re}\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)<5$
- $\arg\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)=\arg\left(2\operatorname{cis}\left(\dfrac{13\pi}{6}-2\pi\right)\right)=\arg\left(2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, logo $0<\arg\left(2\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{6}\right)<\dfrac{\pi}{4}$

Resposta: **Opção C**

8. Determinando o valor de a e de b, temos:

- $a = \lim \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}\right) = \lim \left(\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}\right) = \left(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} = e^3$
- $b = \lim \left(\ln\left(1-2e^{-n}\right)\right) = \ln\left(1-2e^{-\infty}\right) = \ln(1-2\times 0) = \ln 1 = 0$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

---

1. Simplificando a expressão de z na f.a., como $i^{23} = i^{4\times5+3} = \left(i^4\right)^5 \times i^3 = 1^5 \times i^3 = i^3 = -i$, temos:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{2i}{1-i} - 2i = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i(1-i)}{(1-i)} = \frac{2i}{1-i} - \frac{2i-2i^2}{1-i} = \frac{2i-2i+2i^2}{1-i} = \frac{-2}{1-i}$$

Considerando $1-i = \rho \operatorname{cis}\theta$, com o objetivo de escrever z na f.t., vem que:

- $\rho = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Como $-2 = 2\operatorname{cis}\pi$, temos que:

$$z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23} = \frac{-2}{1-i} = \frac{2\operatorname{cis}\pi}{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$$

Pelo que o conjugado de z, é:

$$\overline{z} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$$

E assim, usando a fórmula de Moivre, temos que:

$$w^3 = \overline{z} \Leftrightarrow w^3 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow w = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), k \in \{0,1,2\}$$

Ou seja, temos 3 números complexos w tais que $w^3 = \overline{z}$:

- $k=0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+0}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$
- $k=1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$
- $k=2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}+\frac{16\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\operatorname{cis}\frac{11\pi}{12}$

2\.

2.1. Como existem n bolas no saco e são retiradas 3 simultaneamente, o número de conjuntos diferentes de 3 bolas que podemos obter, ou seja, o número de casos possíveis, é ${}^{n}C_3$

Como n é um número par, existem no saco $\frac{n}{2}$ bolas com números ímpares e $\frac{n}{2}$ bolas com números pares. Como se pretende que duas das bolas tenham um número par, de entre as $\frac{n}{2}$ pretendemos selecionar 2, e como uma das bolas deve ter um número ímpar de entre as $\frac{n}{2}$ pretendemos selecionar 1, pelo que o número de casos favoráveis é ${}^{\frac{n}{2}}C_2 \times {}^{\frac{n}{2}}C_1 = {}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}$

Assim, a probabilidade de duas das 3 bolas terem número par e uma ter número ímpar é: $\dfrac{{}^{\frac{n}{2}}C_2 \times \frac{n}{2}}{{}^{n}C_3}$

2.2. No contexto da situação descrita, $P(A \cap B)$é a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par e que a segunda bola extraída também tenha um número par, ou seja, a probabilidade de que as duas bolas tenham um número par.

No caso de a extração ser feita com reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 8 casos possíveis (as 8 bolas do saco, porque a primeira bola foi reposta), e 4 casos favoráveis (as 4 bolas com um número par, porque como a primeira bola foi reposta, existem 4 números pares), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita sem reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 7 casos possíveis (porque das 8 bolas do saco, foi extraída uma que não foi reposta), e 3 casos favoráveis (porque das 4 bolas com um número par existentes inicialmente, uma foi retirada e não foi reposta), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

Assim, como a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par é $P(A) = \frac{1}{2}$, temos que os valores de $P(A \cap B)$ são:

- Com reposição: $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sem reposição: $b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

3\.

3.1. Como o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$, então o vetor $\vec{v} = (3,3,-1)$ é um vetor normal do plano OFB, e também de todos os planos paralelos a este plano.

Como a reta AF é paralela ao eixo Oz, então as abcissas e ordenadas dos pontos A e F são iguais, pelo que as coordenadas do ponto F são da forma $F(0,2,z_F)$, e como o ponto F pertence ao plano OFB, podemos determinar a sua cota, recorrendo à equação do plano:

$$3(0) + 3(2) - z_F = 0 \Leftrightarrow 0 + 6 = z_F \Leftrightarrow 6 = z_F$$

Como o ponto D tem a mesma cota do ponto F e a base do prisma é um quadrado paralelo ao plano xOy, pela observação da figura, temos que $x_D = -y_F$ e as coordenadas do ponto D são $D(-2,0,6)$

Finalmente, como o plano paralelo ao plano OFB que contém o ponto D tem uma equação da forma $3x + 3y - z + d = 0$, substituindo as coordenadas do ponto D, podemos determinar o valor de d:

$$3(-2) + 3(0) - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 0 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

E assim a equação do plano é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$

3.2. Como o ponto B tem a mesma cota do ponto A e a base do prisma é um quadrado contido no plano xOy, pela observação da figura, temos que $x_B = -y_A$ e as coordenadas do ponto B são $D(-2,2,0)$
Desta forma, um vetor diretor da reta OB é

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2,2,0) - (0,0,0) = (-2,2,0)$$

E uma equação vetorial da reta OB é:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(-2,2,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelo que podemos obter uma condição cartesiana da reta OB, a partir da equação vetorial:

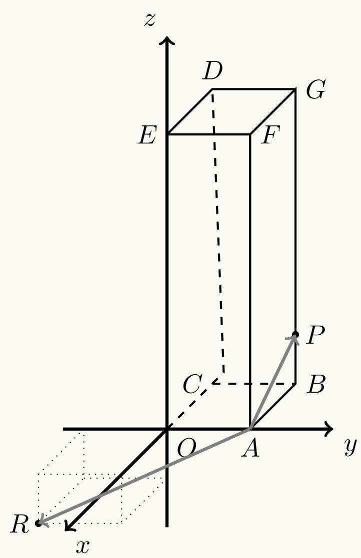
$$\begin{cases} x = 0 - 2\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = \lambda \\ \dfrac{y}{2} = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \wedge z = 0$$

3.3. Como o ponto P pertence à aresta $[BG]$, pela observação da figura, verificamos que tem abcissa e ordenada iguais aos pontos B e G, pelo que as suas coordenadas são:

$$P(-2,2,1)$$

Como o ponto R é simétrico do ponto P relativamente à origem, tem as três coordenadas simétricas, ou seja, tem as suas coordenadas são:

$$R(2,-2,-1)$$



Podemos determinar a amplitude do ângulo RAP através do produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AR}$, pelo que, determinando as coordenadas destes vetores e as respetivas normas, temos:

- $\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,2,1) - (0,2,0) = (-2,0,1)$
  $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AR} = R - A = (2,-2,-1) - (0,2,0) = (2,-4,-1)$
  $\left\|\overrightarrow{AR}\right\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AP}\hat{\ }\overrightarrow{AR}\right) = \frac{\overrightarrow{AP}\,.\,\overrightarrow{AR}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AR}\right\|} = \frac{(-2,0,1).(2,-4,-1)}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-4+0-1}{\sqrt{5 \times 21}} = \frac{-5}{\sqrt{105}} = -\frac{5}{\sqrt{105}}$$

Logo, a amplitude do ângulo RAP, em graus, arredondado às unidades, é

$$R\hat{A}P = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{105}}\right) \approx 119°$$

4.

4.1. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=\lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(e^x+x)-x\Big)=\ln(e^{+\infty}+\infty)-\infty=+\infty-\infty \quad \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\times\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\right)=\ln\left(1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right)=\ln\left(1+\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}\right)=$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=\ln(1+0)=0$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big)=0$, podemos concluir que a reta de equação $y=x$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x\to+\infty$

4.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar f' em $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \cos x\right)' = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' + (\cos x)' = \frac{1}{4}(x^2)' + (-\text{sen}\, x) = \frac{1}{4} \times 2x - \text{sen}\, x = \frac{1}{2}x - \text{sen}\, x$$

Assim, determinando f'' em $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, temos que:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2}x - \text{sen}\, x\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' - (\text{sen}\, x)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, vem $x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$, e como $x \in \left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
f''	n.d.	+	0	−	n.d.
f	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3},0\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$
- tem um ponto de inflexão cuja abcissa é $-\frac{\pi}{3}$

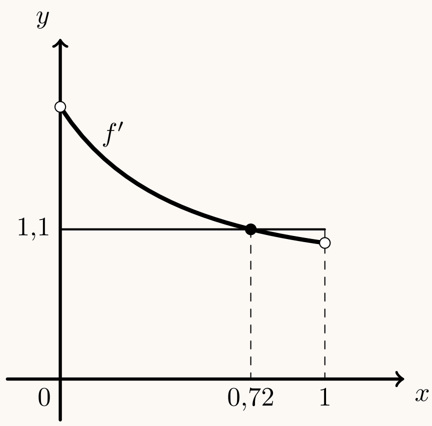
4.3. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor numérico da derivada no ponto, ou seja, $f'(a) = 1{,}1$, determinamos a expressão da derivada relativa ao intervalo $]0,1[$:

$$f'(x) = (\ln(e^x + x))' = \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} = \frac{(e^x)' + (x)'}{e^x + x} = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

Assim, como o declive da reta tangente é 1,1, o valor de a é a solução da equação

$$f'(a) = 1{,}1 \Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 1{,}1$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f', e a reta horizontal definida por $y = 1{,}1$ numa janela coerente com a restrição $x \in]0,1[$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A, $a = x_A \approx 0{,}72$



5.

5.1. De acordo com os dados do enunciado temos que $x = 25$, pelo que a velocidade constante da nave, em quilómetros por segundo, quando termina a queima do combustível é dada por:

$$V(25) = 3\ln\left(\frac{25+300}{25+60}\right) = 3\ln\left(\frac{325}{85}\right) \approx 4{,}02 \text{ km/s}$$

Assim, como a relação entre o tempo (t), a distância (d) e a velocidade (V), em segundos, arredondada às unidades, é:

$$V = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{V}$$

Temos que para viajar 200 quilómetros $(d = 200)$ a esta velocidade $(V = 4{,}02)$, o tempo necessário é:

$$t = \frac{200}{4{,}02} \approx 50 \text{ s}$$

5.2. Pretende-se determinar o valor de x associado ao valor de $V = 3$, ou seja, a solução da equação $V(x) = 3$
Resolvendo a equação, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$V(x) = 3 \Leftrightarrow 3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+300}{x+60} = e^1 \underset{x\neq -60}{\Leftrightarrow} x+300 = e(x+60) \Leftrightarrow x+300 = ex+60e \Leftrightarrow x - ex = 60e - 300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1-e) = 60e - 300 \Leftrightarrow x = \frac{60e-300}{1-e} \Rightarrow x \approx 80 \text{ milhares de toneladas}$$

6. Simplificando a expressão da inequação, temos que:

$$g(0) \times g(k) < 0 \Leftrightarrow \ln(0+k) \times \ln(k+k) < 0 \Leftrightarrow \ln k \times \ln(2k) < 0$$

Atendendo a que:

- $\ln k = 0 \Leftrightarrow k = e^0 \Leftrightarrow k = 1$
- $\ln(2k) = 0 \Leftrightarrow 2k = e^0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Como k é um número real positivo ($k \in]0, +\infty[$) estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

k	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln k$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln(2k)$	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(0) \times g(k)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$

Pelo que se concluí que se $g(0) \times g(k) < 0$, então $k \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$